CONCOURS ESTP - ENSAM

d'admission à :

L'ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

- Banque de notes ECRIN et ISEP -

SESSION 1998

Filière PC

MATHÉMATIQUES 3

Durée : 4 heures

Nota : Les deux problèmes sont indépendants.
Respecter strictement la numérotation des parties et des questions.

PROBLEME 1

Soit E l'espace vectoriel sur R des applications f continues de $[0,+\infty[$ dans R vérifiant : $\forall a>0$, $\lim_{t\to+\infty}\left[e^{-at}f(t)\right]=0$.

On note E_1 le sous ensemble de E formé par les applications f de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et telles que f' et f'' appartiennent à E.

1 Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

2 Montrer que : $\forall x>0$, $\forall f\in E$, $t\to f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3 Montrer que la fonction g définie par : $\forall t>0$, $g(t)=\frac{\sin t}{t}$ et $g(0)=1$, appartient à E_1.

4 Si $f \in E$, on note $L(f) = F$ avec $\forall x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt$.

Montrer que $\forall f \in E_1$, $\forall x > 0$:

$$L(f')(x) = -f(0) + x\, L(f)(x)$$
$$L(f'')(x) = -f'(0) - x\, f(0) + x^2\, L(f)(x) .$$

5 Soit $\sum a_n\, t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$.

On pose $\rho = \frac{1}{R}$ si $R \neq +\infty$ et $\rho = 0$ si $R = +\infty$.

a] Montrer que $\forall t \in R$ la série $\sum \frac{a_n\, t^n}{n!}$ converge.

On note , $\forall t \in R$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}$.

b] Montrer que $\forall x > \rho$, $t \to f(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

et que $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$.

c] Calculer , $\forall x > 1$, $L(g)(x)$, g étant la fonction définie au 3°) .

d] On note ψ la fonction définie par :

$$\forall t > 0 , \quad \psi(t) = \frac{\cos t}{t^2} - \frac{\sin t}{t^3} \quad \text{et} \quad \psi(0) = -\frac{1}{3} .$$

Montrer que $\psi \in E$ et calculer, pour tout $x > 1$: $\int_0^{+\infty} \psi(t)\, e^{-xt}\, dt$.

6 Soit $x > 0$. On note f_x la fonction définie par $\begin{cases} f_x(t) = \dfrac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \\ f_x(0) = 0 . \end{cases}$

a] Montrer que $f_x \in E$.

Soit $b > 0$. On note I l'application de $]0, +\infty[$ dans R définie par :
$I(x) = L(f_x)(b)$.

b] Montrer que I est une application continue sur $]0, +\infty[$, admettant un prolongement continu sur $[0, +\infty[$, noté encore I .

c] Calculer $I(0)$. (On admet que: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

d] Montrer que I est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$,
$I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}}\ I(x)$.

e] En déduire $I(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$.

PROBLEME 2

Soit E l'ensemble des applications continues de R dans C .
Si f et g appartiennent à E, on note :

$$\forall x \in R \ , \quad (f*g)(x) = \int_0^x f(x-y)\,g(y)\,dy$$

Dans la suite f et g appartiennent à E.

1 Montrer que $f*g = g*f$ et que l'application $(f,g) \to f*g$ est bilinéaire.

2 Montrer que $\forall x \in R,\ (f*g)(x) = x\int_0^1 f(x-tx)\,g(tx)\,dt$ et en déduire que $f*g \in E$.

3 Exemple: On pose, pour $t \in$ R , $f(t) = \sin(2\pi t)$ si $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, sinon $f(t) = 0$.
Montrer que $f \in E$ et déterminer $f*f$.

4 On note F l'ensemble des applications de R dans C de classe C^∞ sur R.

a] Montrer que si $f \in F$ et $g \in F$, $f*g$ est de classe C^1 sur R et que :

$\forall x \in R$, $(f*g)'(x) = f(0)g(x)+(f'*g)(x)$.

b] En déduire que si $f \in F$ et $g \in F$, $f*g \in F$.

5 Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in C^n$ et $g \in F$; $n \in N$, $n \geq 2$. On considère l'équation différentielle :

$$(L) \; : \; y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = g(x) \; .$$

On appellera solution de l'équation différentielle (L) toute fonction f définie sur R, n fois dérivable, telle que :

$$\forall x \in R \; , \; f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + ... + a_0 f(x) = g(x) \; .$$

Soit f_0, la solution définie sur R, de l'équation différentielle :

$$(L_0) \; : \; y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$$

telle que: $f_0(0) = f_0'(0) = ... = f_0^{(n-2)}(0) = 0$ et $f_0^{(n-1)}(0) = 1$

On admet qu'une telle solution existe et est unique.

a] Montrer que $f_0 \in F$ et que f_0*g est solution de (L) .

b] Soit $f \in F$. Montrer que f est solution de (L) si et seulement si il existe $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in C^n$ tel que :

$$f = \sum_{p=0}^{n-1} b_p f_0^{(p)} + f_0 * g \; .$$

On pourra utiliser le fait que l'ensemble des solutions sur R de (L_0) est un C-espace vectoriel de dimension n.

c] Dans le cas $n = 2$, si $(\alpha_0, \alpha_1) \in C^2$, déterminer la solution de (L) telle que $f(0) = \alpha_0$ et $f'(0) = \alpha_1$;
On exprimera en particulier b_0 et b_1 en fonction de α_0, α_1, a_0 et a_1 .